# EXERCÍCIOS ADICIONAIS CAPÍTULO 1

1. A meteorologia prevê que chova no próximo sábado com probabilidade 0.25, e que chova no próximo domingo com probabilidade 0.25. É lícito deduzir que, de acordo com a meteorologia, a probabilidade de chover no próximo fim-de-semana é de 0.5?

2. Um sistema electrónico é formado por dois subsistemas, $A$ e $B$. De ensaios anteriores sabe-se que: a probabilidade de $A$ falhar é 0.2, a probabilidade de $B$ falhar sozinho é 0.15, e a probabilidade de $A$ e $B$ falharem simultaneamente é 0.15. Determine a probabilidade de:
   a) $B$ falhar.
   b) Falhar apenas $A$.
   c) Falhar pelo menos um deles, $A$ ou $B$.
   d) Não falhar nem $A$ nem $B$.
   e) $A$ e $B$ não falharem simultaneamente.

3. Dos trabalhadores de uma empresa que utilizam regularmente os transportes públicos na sua deslocação de casa para o emprego sabe-se que:
   – 54% utilizam exclusivamente um destes meios de transporte: autocarro (22%), metropolitano (25%) ou comboio (7%);
   – 44% utilizam pelo menos dois daqueles três meios de transporte: 18% utilizam o autocarro e o metropolitano; 17% utilizam o autocarro e o comboio; 19% utilizam o metropolitano e o comboio.
   a) Tendo presente que existem outros meios de transporte público para além dos enunciados atrás, qual a percentagem de trabalhadores que não utilizam qualquer destes meios de transporte?
   b) Qual a percentagem de trabalhadores que utilizam os três meios de transporte na sua deslocação para o trabalho?

4. Sejam $A$ e $B$ acontecimentos de um espaço de resultados $\Omega$. Classifique as afirmações abaixo de verdadeiras ou falsas, justificando sucintamente:
   a) Se $A \cup B$ se realizou, então sabemos que $B$ também se realizou.
   b) O acontecimento $A$ realiza-se sempre que $A - B$ se realiza.
   c) Se $A \subset B$ e $P(B) = 0$, então pode afirmar-se que $P(A) = 0$.
   d) Se $P(A) = 0.75$ e $P(B) = 0.5$, então $A$ e $B$ não podem ser mutuamente exclusivos.
   e) Se $P(A - B) = 0$ então $P(A \cup B) = P(B)$.

5. Para cada um dos casos seguintes indique, justificando, qual a interpretação do conceito de probabilidade (clássica, frequencista ou subjectiva) que julga mais adequada:
   a) Probabilidade de no próximo ano a taxa de inflação ser superior a 5%.
   b) Probabilidade de obter a face com seis pontos ao lançar um dado regular.
   c) Probabilidade de uma peça extraída ao acaso de um lote muito numeroso ser defeituosa.

d) Probabilidade de obter o primeiro prémio numa dada semana em que compra um bilhete de lotaria.
e) Probabilidade de o PIB crescer mais que 3%, no próximo ano.
f) Probabilidade de uma pessoa, escolhida ao acaso de entre as que entram num armazém, realizar uma compra.

6. O restaurante "Bem Comer" tem na sua ementa cinco entradas, quatro pratos de peixe, cinco de carne e seis sobremesas.
   a) Suponha que uma refeição completa é composta por quatro tipos de prato: entrada, prato de peixe, prato de carne e sobremesa. Quantas refeições diferentes se podem comer neste restaurante?
   b) Se se admitir que a refeição é composta por quaisquer três daqueles tipos de prato, quantas refeições diferentes se podem comer?

7. Da sucessão de números naturais, $1, 2, \ldots, n,$ escolhem-se dois ao acaso, sem reposição. Calcule a probabilidade de um deles ser menor que $k$ ( $k = 2, 3, \ldots, n-1$ ) e o outro maior.

8. O *Mastermind* é um jogo em que o 1.º jogador escolhe 4 alfinetes de cor diferente (6 cores disponíveis para cada alfinete) e os espeta por determinada ordem num tabuleiro, escondidos da vista do 2.º jogador. Este tem por objectivo descobrir a chave escondida. Qual a probabilidade de acertar logo na 1.ª tentativa?

9. Considere que um sistema informático gera aleatoriamente uma palavra-chave para um novo utilizador constituída por um conjunto de 5 letras (eventualmente repetidas) de um alfabeto com 26 letras (não existe distinção entre maiúsculas e minúsculas). Qual a probabilidade de não haver letras repetidas numa palavra-chave?

10. Um saco tem 6 bolas, 4 das quais são brancas.
    a) Se se extrair duas bolas, ao acaso e sem reposição, qual a probabilidade de pelo menos uma delas ser branca?
    b) Lança-se um dado perfeito: se sair um número ímpar extrai-se uma bola do saco e se sair um número par extraem-se duas bolas, ao acaso e sem reposição, do saco. Qual a probabilidade das bolas extraídas serem brancas?

11. O jogo do Euromilhões consiste na extracção, sem reposição, de 5 números (de 1 a 50) e de duas estrelas (numeradas de 1 a 12). Feita uma aposta, que corresponde à escolha de 5 números e 2 estrelas, calcule:
    a) Qual a probabilidade de ganhar o primeiro prémio (acertar em 5 números e 2 estrelas)?
    b) Qual a probabilidade de sair o último prémio (13º prémio: acertar em 2 números e 0 estrelas)? E o penúltimo (12º prémio: acertar em 2 números e 1 estrela)?

12. Num conselho de administração têm assento 15 pessoas. Destas, 10 são favoráveis à proposta $A$, e 5 são favoráveis à proposta $B$.
    a) Qual a probabilidade de a proposta $B$ ganhar se a decisão final for delegada numa comissão de 3 elementos a sortear aleatoriamente?

b) Se a comissão tiver 4 elementos, qual a probabilidade de se verificar um empate?

13. Considere um teste de resposta múltipla com 20 perguntas, cada uma com 4 respostas possíveis. Admitindo que as respostas são dadas ao acaso, que as perguntas são igualmente pontuadas (com um valor por pergunta) e que não se penalizam negativamente as respostas erradas:
    a) Qual a probabilidade de errar todas as respostas?
    b) Qual a probabilidade de ter nota superior a 9 valores? Formalize.

14. Numa experiência de aprendizagem, um indivíduo realiza duas vezes seguidas uma determinada tarefa, podendo falhar ou ser bem sucedido em cada uma delas. A probabilidade de falhar a primeira tentativa é de 0.25. Se falhar a primeira, a probabilidade de ser bem sucedido na segunda é de 0.5. Se for bem sucedido na primeira, a probabilidade de falhar na segunda é de 0.1. Qual a probabilidade de falhar a segunda tentativa?

15. Uma empresa utiliza 3 linhas de montagem, A1, A2 e A3, no fabrico de determinado produto. Os produtos fabricados na linha A1 são defeituosos em 5% dos casos, os da linha A2, em 8%, e os da linha A3, em 10%. Sabendo que a linha A1 corresponde a 50% da produção e a linha A2 a 30%, qual a probabilidade de um produto escolhido ao acaso ser defeituoso? E se for defeituoso, qual a probabilidade de ele provir de cada uma das linhas de fabrico?

16. Uma companhia de seguros estima que 30% de todos os acidentes de automóvel são, em parte, causados por más condições atmosféricas, e que 20% de todos os acidentes de automóvel envolvem danos corporais. Adicionalmente, dos acidentes que envolvem danos corporais, 40% foram, em parte, causados por más condições atmosféricas.
    a) Qual a probabilidade de que um acidente escolhido ao acaso tenha sido, em parte, causado por más condições atmosféricas e tenham ocorrido danos corporais.
    b) Os acontecimentos "acidentes causados, em parte, por más condições atmosféricas" e "acidentes envolvendo danos corporais" são independentes?
    c) Se num acidente escolhido ao acaso as causas foram, em parte, devidas a más condições atmosféricas, qual a probabilidade de que tenham ocorrido danos corporais?
    d) Qual a probabilidade de que um acidente escolhido ao acaso não tenha sido, em parte, causado por más condições atmosféricas e não tenham ocorrido danos corporais?

17. O António na sua deslocação de casa para a escola apanha todos os dias à mesma hora o primeiro de três autocarros que servem a sua escola. Estes três autocarros - $A$, $B$ e $C$ - têm percursos diferentes e passam habitualmente, nesse local e nessa hora, com as seguintes frequências: $A$ e $C$ passam com a mesma frequência que é igual a metade da frequência com que passa $B$. Da experiência passada sabe-se ainda que o

António quando apanha o autocarro $A$ chega a horas em 90% das vezes, descendo esta percentagem para 80% e 60% quando apanha o autocarro $C$ e $B$, respectivamente.

a) Calcule a percentagem de vezes que o António chega atrasado às aulas.

b) Qual a percentagem de vezes que apanha o autocarro $B$ e chega atrasado.

18. A fim de seleccionar uma pessoa para certo serviço, cada candidato é submetido sucessivamente a três testes – $A$, $B$ e $C$ –, só passando ao teste seguinte se tiver uma pontuação pelo menos igual a 60%. São seleccionados os candidatos que tenham pelo menos 60% em cada teste ou que obtenham pelo menos 90% em algum teste. Os candidatos são submetidos às provas um a um, parando logo que haja um deles em condições de ser seleccionado. Da experiência sabe-se que:
    - dos indivíduos que fazem o teste $A$: 10% têm pelo menos 90%; 30% têm entre 60% e 90%;
    - dos indivíduos que passam ao teste $B$: 20% têm neste teste pelo menos 90%; 40% têm neste teste entre 60% e 90%;
    - dos indivíduos que passam ao teste $C$: 50% têm neste teste pelo menos 60%.

    Qual a probabilidade de se ter de analisar exactamente dois indivíduos para se seleccionar um candidato?

19. A probabilidade de um indivíduo de determinada cidade ter determinada doença é 0.02. O teste utilizado para detectar a doença dá resultado positivo em 90% dos doentes mas também em 5% dos não doentes.

    a) Qual a probabilidade de o teste ser positivo, para um indivíduo escolhido ao acaso?

    b) Sabendo que o teste é positivo, qual a probabilidade de o indivíduo ser doente?

20. Maria, uma promissora engenheira química, está interessada em saber se determinada substância está contaminada por uma impureza que conduz à sua inutilização. Existe um teste laboratorial que tem probabilidade 0.8 de assinalar a impureza quando a substância está efectivamente contaminada, e probabilidade de 0.1 de assinalar a presença da impureza quando esta não está contaminada. Sabe-se ainda que, antes de efectuar qualquer teste, a probabilidade da substância estar contaminada por essa impureza é de 0.4.

    a) Qual a probabilidade de um teste laboratorial assinalar a presença da impureza?

    b) Tendo o teste assinalado a impureza, calcule a probabilidade da substância estar efectivamente contaminada.

21. Por precaução, dada a sua inexperiência, a engenheira química do exercício anterior efectuou de forma independente duas vezes o teste laboratorial à mesma substância.

    a) Qual a probabilidade dos dois testes acusarem a presença da impureza se a substância estiver efectivamente contaminada? E se não estiver contaminada?

    b) Calcule a probabilidade de os dois testes acusarem a presença da impureza.

    c) Sabendo que os dois testes acusaram a presença da impureza, qual a probabilidade da substância estar efectivamente contaminada. Comente tendo em conta os resultados do exercício anterior.

22. Sabe-se que determinado vírus, para o qual existe um tratamento que permite controlar de forma eficaz a sua evolução, afecta alguns indivíduos em idade adulta. A doença manifesta-se de forma grave em 2% dos casos, de forma moderada, em 12%, e não afecta os restantes. O teste utilizado para detectar a doença dá resultado positivo em 95% dos casos graves, em 80% dos casos moderados e, ainda, em 5% dos que estão saudáveis.
   a) Escolhida uma pessoa ao acaso, qual a probabilidade do teste dar positivo?
   b) Mostre que a maioria das vezes em que o teste dá positivo, o indivíduo está afectado moderadamente pelo vírus.
   c) Escolhidos 100 indivíduos ao acaso, qual a probabilidade de 3 deles estarem gravemente afectados pelo vírus?

23. No seu percurso habitual para a escola, um estudante passa por dois semáforos de funcionamento independente. A probabilidade de cada um dos semáforos estar "verde", para ele, é de 0.4 para o primeiro e 0.5 para o segundo. Atendendo à hora de saída habitual, e sem outros contratempos, nos dias ditos “normais” ele só chega à escola a tempo do primeiro toque para as aulas, se pelo menos um dos semáforos estiver “verde”.
   Num dia em que o estudante chegou à escola antes do primeiro toque qual a probabilidade de ter apanhado somente um dos semáforos “verdes”.

24. Fazem-se 3 lançamentos de um dado regular. O acontecimento $A_1$ realiza-se quando o resultado do primeiro lançamento é 1 ou 2; o acontecimento $A_2$ realiza-se quando o resultado do segundo lançamento é 3 ou 4; o acontecimento $A_3$ realiza-se quando o resultado do terceiro lançamento é 5 ou 6. Calcule $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3)$.

25. Sejam $A$ e $B$ acontecimentos independentes, definidos no mesmo espaço de resultados, sendo $P(A) = 1/3$ e $P(B) = 3/4$.
   a) Calcule $P(A \cup B)$ e $P(B \mid A \cup B)$.
   b) Mostre que os acontecimentos complementares também são independentes.

26. Dados os acontecimentos $A$ e $B$, mostre que,
$$P(A \cap B) \le P(A) \le P(A \cup B).$$

27. Mostre que, se $P(B \mid A) = P(B \mid \overline{A})$, então os acontecimentos $A$ e $B$ são independentes.

28. Prove que, se $P(B) > 0$, então $P(A \cup C \mid B) = P(A \mid B) + P(C \mid B) - P(A \cap C \mid B)$.

29. É possível ter uma situação em que $P(A) = 1/4$, $P(B) = 1/2$ e $P(A \cap B) = 1/3$? Justifique.

Exercícios adicionais capítulo 1

**SOLUÇÕES**

1. Não. É menor ou igual a 0.5 (só seria 0.5 se fosse zero a probabilidade de chover em ambos os dias).
2. a) 0.3; b) 0.05; c) 0.35; d) 0.65; e) 0.85.
3. a) 0.02; b) 0.05.
4. a) F; b) V; c) V; d) V; e) V.
5. a) e) subjectiva; b) d) clássica; c) f) frequencista.
6. a) 600; b) 490.
7. $\frac{2(k-1)(n-k)}{n(n-1)}$.
8. 0.0028.
9. 0.6644.
10. a) 0.9333 ; b) 0.5333
11. a) 7.151E-09; b) 0.04566; 0.02029
12. a) 0.2418; b) 0.3297.
13. a) 0.0032; b) 0.0139.
14. 0.2.
15. 0.0690, 0.3623, 0.3478, 0.2899.
16. a) 0.08; b) não são; c) 0.2667; d) 0.58.
17. a) 27.5% ; b) 20%.
18. 0.1716.
19. a) 0.067; b) 0.2687.
20. a) 0.38; b) 0.8421.
21. a) 0.64, 0.01; b) 0.262; c) 0.9771.
22. a) 0.158; b) 0.6077; c) 0.1823.
23. 0.7143
24. 0.7037.
25. a) 0.8333, 0.9.
29. Não.